

Ueber die Reichweite des lokalen Kolmogoroff-Kriteriums bei der nicht-linearen gleichmäßigen Approximation

WERNER KRABS

*Institut für Angewandte Mathematik der Universität,
Hamburg, Rothenbaumchaussee, West Germany*

Sei M ein kompakter metrischer Raum und $C(M)$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf M . $C(M)$ sei versehen mit der Maximum-Norm

$$\|g\| = \max_{x \in M} |g(x)|, \quad g \in C(M).$$

Das nicht-lineare Approximationsproblem besteht bekanntlich darin, eine vorgegebene Funktion $f \in C(M)$ im Sinne der Maximum-Norm durch Funktionen aus einer ebenfalls vorgegebenen Familie $\{F(\alpha)\}_{\alpha \in A} \subseteq C(M)$ möglichst gut anzunähern. Dabei ist A eine nichtleere Teilmenge des reellen n -dimensionalen Raumes \mathfrak{R}^n , und für jedes feste $\alpha \in A$ ist also $F(\alpha) = F(\alpha, x)$ eine in $x \in M$ stetige Funktion. Definiert man

$$\rho(f) = \inf_{\alpha \in A} \|F(\alpha) - f\|,$$

so ist ein $\hat{\alpha} \in A$ gesucht mit

$$\|F(\hat{\alpha}) - f\| = \rho(f). \tag{1}$$

Unter diese Problemstellung lassen sich die bekannten Fälle der linearen Approximation (insbesondere der Polynomapproximation), der rationalen Approximation und der Exponentialapproximation unterordnen [3].

In diesen Fällen ist A eine nicht-leere offene Teilmenge des \mathfrak{R}^n , und die Abbildung $F: A \rightarrow C(M)$, die jedem $\alpha \in A$ eindeutig ein $F(\alpha) \in C(M)$ zuordnet, genügt der folgenden

DIFFERENZIERBARKEITSBEDINGUNG: *Für jedes feste $x \in M$ besitzt die Abbildung $\alpha \rightarrow F(\alpha, x)$ auf A partielle Ableitungen*

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha, x), \quad j = 1, \dots, n,$$

die in (α, x) stetig sind.

Wir wollen im folgenden jedes $F(\hat{\alpha})$, für das (1) gilt, eine Minimallösung nennen. Die Frage nach der Existenz von Minimallösungen läßt sich nur in einem sehr beschränkten Umfang positiv beantworten, so zum Beispiel für die lineare und die gewöhnliche rationale Approximationsaufgabe. Schon im Fall der verallgemeinerten rationalen Approximation ist die Existenz von Minimallösungen nicht gesichert.

Hingegen lassen sich die Minimallösungen sehr allgemein durch notwendige und hinreichende Bedingungen charakterisieren. Der Hauptgegenstand dieser Arbeit ist die folgende notwendige Bedingung, nämlich (vgl. [3]).

SATZ 1. $A \subseteq \mathfrak{R}^n$ sei nicht-leer und offen, und $F: A \rightarrow C(M)$ genüge der Differenzierbarkeitsbedingung. Ist $F(\hat{\alpha})$, $\hat{\alpha} \in A$, eine Minimallösung, so folgt für jedes $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathfrak{R}^n$:

$$\min_{x \in E_{\hat{\alpha}}} (F(\hat{\alpha}, x) - f(x)) \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\hat{\alpha}, x) \leq 0, \tag{2}$$

wobei

$$E_{\hat{\alpha}} = \{x \in M : |F(\hat{\alpha}, x) - f(x)| = \|F(\hat{\alpha}) - f\|\}$$

ist.

Im Falle der linearen Approximation ist (2) die bekannte Kolmogoroff-Bedingung (vgl. [2] und [5]) und erweist sich auch als hinreichend für Minimallösungen. In [4] haben wir ein Verfahren zur Lösung des diskreten linearen Approximationsproblems (wo M aus endlich vielen Punkten besteht) angegeben, das auf der Kolmogoroff-Bedingung basiert. Dieses Verfahren läßt sich auch auf gewisse Fälle nicht-linearer Approximation (z.B. auf den Fall der verallgemeinerten rationalen Approximation) übertragen, wenn man die Kolmogoroff-Bedingung durch die Bedingung (2) ersetzt. Diese wollen wir im folgenden lokale Kolmogoroff-Bedingung nennen.

Es erhebt sich jetzt die Frage, für welche Funktionen $F: A \rightarrow C(M)$ die lokale Kolmogoroff-Bedingung auch hinreichend für Minimallösungen ist. In [3] haben wir eine Klasse von differenzierbaren Funktionen $F: A \rightarrow C(M)$ angegeben, für die das wahr ist und die eng mit der von Meinardus und Schwedt in [6] eingeführten Klasse der asymptotisch konvexen Funktionen $F: A \rightarrow C(M)$ zusammenhängt. Sie umfaßt z.B. die Fälle der linearen, der verallgemeinerten rationalen und der Exponentialapproximation. Wir wollen diese Klasse durch eine etwas allgemeinere ersetzen. Zu dem Zweck machen wir für das Folgende die

GENERALVORAUSSETZUNG: $A \subseteq \mathfrak{R}^n$ sei nicht-leer und offen, und $F: A \rightarrow C(M)$ genüge der Differenzierbarkeitsbedingung.

Eine zentrale Rolle spielt im folgenden die

VORZEICHENBEDINGUNG: Zu jeder nicht-leeren abgeschlossenen Teilmenge D von M und jedem Paar $(\alpha, \beta) \in A \times A$ mit

$$F(\alpha, x) - F(\beta, x) \neq 0 \quad (3)$$

für alle $x \in D$ gibt es ein $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathfrak{R}^n$ mit

$$\min_{x \in D} (F(\alpha, x) - F(\beta, x)) \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha, x) > 0. \quad (4)$$

SATZ 2. $F: A \rightarrow C(M)$ genüge der Vorzeichenbedingung. Ist dann für ein $\hat{\alpha} \in A$ die lokale Kolmogoroff-Bedingung (2) erfüllt, so ist $F(\hat{\alpha})$ eine Minimallösung.

Beweis. Sei $F(\hat{\alpha})$ keine Minimallösung. Dann gibt es ein $\beta \in A$ mit

$$\rho(f) \leq \|F(\beta) - f\| < \|F(\hat{\alpha}) - f\|.$$

Hieraus aber folgt

$$(F(\hat{\alpha}, x) - f(x))(F(\hat{\alpha}, x) - F(\beta, x)) > 0$$

für alle $x \in E_{\hat{\alpha}}$, insbesondere also

$$F(\hat{\alpha}, x) - F(\beta, x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in E_{\hat{\alpha}}.$$

Da F der Vorzeichenbedingung genügt, gibt es ein $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathfrak{R}^n$ mit

$$\min_{x \in E_{\hat{\alpha}}} (F(\hat{\alpha}, x) - f(x)) \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\hat{\alpha}, x) > 0,$$

d.h., Bedingung (2) ist verletzt. Damit ist alles gezeigt. Die Funktionen $F: A \rightarrow C(M)$, die der Vorzeichenbedingung genügen, lassen sich folgendermaßen charakterisieren.

SATZ 3. $F: A \rightarrow C(M)$ genügt genau dann der Vorzeichenbedingung, wenn es zu jeder nicht-leeren abgeschlossenen Teilmenge D von M und jedem Paar $(\alpha, \beta) \in A \times A$ mit

$$F(\alpha, x) - F(\beta, x) \neq 0 \quad (3)$$

für alle $x \in D$ eine Familie $\{\alpha(t) : t \in [0, t_0]\} \subseteq A$ für hinreichend kleines $t_0 > 0$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = \alpha, \quad (5)$$

$$\min_{x \in D} (F(\alpha, x) - F(\beta, x))(F(\alpha, x) - F(\alpha(t), x)) > 0 \quad (6)$$

für alle $t \in (0, t_0]$ und

$$\|F(\alpha) - F(\alpha(t))\| = O(t) \tag{7}$$

für $t \rightarrow 0$.

Beweis. Sei $D \subseteq M$ nicht-leer und abgeschlossen sowie $(\alpha, \beta) \in A \times A$ ein beliebiges Paar, für das (3) gilt.

(a) F genüge der Vorzeichenbedingung.

Dann gibt es ein $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathfrak{R}^n$ derart, daß (4) erfüllt ist. Wir definieren

$$\alpha(t) = \alpha - t \cdot h.$$

Für genügend kleines $t_0 > 0$ folgt dann $\{\alpha(t) : t \in [0, t_0]\} \subseteq A$, und (5) ist offenbar erfüllt. Auf Grund des Mittelwertsatzes gibt es zu jedem $x \in M$ und $t \in [0, t_0]$ ein $\tau_x \in [0, t]$ mit

$$F(\alpha, x) - F(\alpha(t), x) = t \left\{ \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha, x) + \sum_{j=1}^n h_j \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha(\tau_x), x) - \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha, x) \right] \right\}$$

Sei

$$\mu = \min_{x \in D} \left| \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha, x) \right|.$$

Wegen (4) ist $\mu > 0$, und für genügend kleines $t > 0$ gilt

$$\sum_{j=1}^n |h_j| \left\| \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha(\tau)) - \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha) \right\| \leq \frac{\mu}{2}$$

für alle $\tau \in [0, t]$, da nach Satz 1 in [3] für jedes feste $h \in \mathfrak{R}^n$ die Abbildung

$$\alpha \rightarrow \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha)$$

von A in $C(M)$ stetig ist. Damit ergibt sich für genügend kleines $t_0 > 0$, daß (6) erfüllt ist für alle $t \in (0, t_0]$. Setzt man

$$K = \max_{\tau \in [0, t_0]} \sum_{j=1}^n |h_j| \left\| \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha(\tau)) \right\|,$$

so folgt

$$\|F(\alpha) - F(\alpha(t))\| \leq K \cdot t \quad \text{für alle } t \in [0, t_0],$$

d.h., auch (7) ist erfüllt.

(b) F sei derart, daß (3) die Aussagen (5), (6) und (7) impliziert. Für jedes $t \in [0, t_0]$ definieren wir

$$\gamma_t(\tau) = \alpha + \tau\{\alpha(t) - \alpha\}, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Für genügend kleines $t > 0$ können wir annehmen, daß

$$\{\gamma_t(\tau): 0 \leq \tau \leq 1\} \subseteq A$$

gilt. Für jedes solche $t > 0$ und jedes $x \in M$ gibt es dann nach dem Mittelwertsatz ein $\tau_x \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} F(\alpha, x) - F(\alpha(t), x) &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_j(t)) \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\gamma_t(\tau_x), x) \\ &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_j(t)) \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha, x) + \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_j(t)) \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\gamma_t(\tau_x), x) - \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha, x) \right\} \end{aligned}$$

Sei

$$\mu_t = \min_{x \in D} (F(\alpha, x) - F(\alpha(t), x)) (F(\alpha, x) - F(\beta, x)).$$

Wegen (6) ist $\mu_t > 0$ für alle $t \in (0, t_0]$. Wiederum folgt nach Satz 1 in [3] für alle $\tau \in [0, 1]$

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j - \alpha_j(t)| \left\| \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\gamma_t(\tau)) - \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha) \right\| \|F(\alpha) - F(\beta)\| \leq \frac{\mu_t}{2},$$

sofern $t > 0$ genügend klein gewählt wird. Damit aber ergibt sich

$$\min_{x \in D} (F(\alpha, x) - F(\beta, x)) \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_j(t)) \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha, x) \geq \frac{\mu_t}{2} > 0$$

für genügend kleines $t > 0$. (4) ist also für $h = \alpha - \alpha(t)$ erfüllt. Das vollendet den Beweis von Satz 3.

Um zu einer Aussage über die Reichweite der lokalen Kolmogoroff-Bedingung (2) zu gelangen, ziehen wir eine weitere Verallgemeinerung der Kolmogoroff-Bedingung heran, die von Meinardus und Schwedt in [6] eingeführt worden ist und folgendermaßen lautet: $\hat{\alpha} \in A$ sei fest gegeben.

Für jedes $\alpha \in A$ gelte

$$\min_{x \in E\hat{\alpha}} (F(\hat{\alpha}, x) - f(x)) (F(\hat{\alpha}, x) - F(\alpha, x)) \leq 0. \quad (8)$$

Meinardus und Schwedt haben in [6] gezeigt, daß für jedes $f \in C(M)$ die Bedingung (8) hinreichend dafür ist, daß $F(\hat{\alpha})$ eine Minimallösung ist.

Die Bedingung (8) ist aber im allgemeinen nicht notwendig für Minimallösungen. Daher definieren die genannten Autoren sog. asymptotisch konvexe Funktionen $F: A \rightarrow C(M)$, für die das wahr ist.

Brosowski hat nun in [1], drittes Kap., §1, eine völlige Charakterisierung der Funktionen $F: A \rightarrow C(M)$ angegeben, für die (8) bei beliebigem $f \in C(M)$ notwendig dafür ist, daß $F(\hat{\alpha})$ eine Minimallösung ist. Er betrachtet sogar den allgemeineren Fall, wo anstelle von Familien $\{F(\alpha)\}_{\alpha \in A}$ beliebige Teilmengen

V von $C(M)$ betrachtet werden. In unserem Spezialfall $V = \{F(\alpha)\}_{\alpha \in A}$ läßt sich sein Ergebnis folgendermaßen formulieren.

SATZ 4. *Bedingung (8) ist genau dann bei beliebigem $f \in C(M)$ notwendig für Minimallösungen $F(\hat{\alpha})$, $\hat{\alpha} \in A$, wenn zu jeder nichtleeren abgeschlossenen Teilmenge D von M und jedem Paar $(\alpha, \beta) \in A \times A$ mit (3) eine Familie $\{\alpha(t) : t \in [0, t_0]\} \subseteq A$ für genügend kleines $t_0 > 0$ existiert, für die (6) und (7) erfüllt sind.*

Aus Satz 3 und 4 ergibt sich unmittelbar das

KOROLLAR. *$F: A \rightarrow C(M)$ habe die Eigenschaft, daß für jede Folge $\{\alpha_i\} \subseteq A$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} \|F(\alpha_i) - F(\alpha)\| = 0$, $\alpha \in A$, auch $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = \alpha$ gilt.*

Behauptung: Bedingung (8) ist genau dann bei beliebigem $f \in C(M)$ notwendig für eine Minimallösung $F(\hat{\alpha})$, $\hat{\alpha} \in A$, wenn $F: A \rightarrow C(M)$ der Vorzeichenbedingung genügt.

SATZ 5. *Für beliebiges $f \in C(M)$ sei Bedingung (8) notwendig und die lokale Kolmogoroff-Bedingung (2) hinreichend für eine Minimallösung $F(\hat{\alpha})$, $\hat{\alpha} \in A$. Dann genügt $F: A \rightarrow C(M)$ der Vorzeichenbedingung.*

Beweis. Sei $D \subseteq M$ nicht-leer und abgeschlossen, und für $(\alpha, \beta) \in A \times A$ gelte (3). Mit Hilfe des Urysohnschen Lemmas läßt sich dann ein $g \in C(M)$ konstruieren mit

$$g(x) = \operatorname{sgn}(F(\alpha, x) - F(\beta, x)) \quad \text{für } x \in D$$

und $|g(x)| < 1 \quad \text{für } x \notin D.$

Definiert man $f = F(\alpha) - g$, so ist

$$F(\alpha) - f = g \quad \text{und} \quad E_\alpha = D.$$

Ferner ist

$$\min_{x \in E_\alpha} (F(\alpha, x) - f(x))(F(\alpha, x) - F(\beta, x)) > 0.$$

Damit ist $F(\alpha)$ keine Minimallösung für f , und auch (2) kann nach Voraussetzung nicht gelten. Es gibt daher ein $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathfrak{R}^n$ mit

$$\min_{x \in D} (F(\alpha, x) - F(\beta, x)) \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha, x) > 0,$$

was den Beweis vollendet.

Abschlußbemerkung. In Satz 5 gilt auf Grund der Sätze 2, 3 und 4 auch die Umkehrung, so daß die Funktionen $F: A \rightarrow C(M)$, die der Vorzeichenbedingung genügen, den Durchschnitt der beiden Klassen von Funktionen F bilden, für die bei beliebigem $f \in C(M)$ einerseits die Bedingung (8) stets notwendig und andererseits die lokale Kolmogoroff-Bedingung (2) stets hinreichend für eine Minimallösung sind.

LITERATUR

1. B. BROSOWSKI, Nichtlineare Tschebyscheff-Approximation. Mannheim: BI, Hochschultaschenbücher Nr. 808/808a, 1968.
2. A. N. KOLMOGOROFF, Eine Bemerkung zu den Polynomen von P. L. Tschebyscheff, die von einer gegebenen Funktion am wenigsten abweichen (Russisch). *Usp. Mat. Nauk* 3 (1948) 216–221.
3. W. KRABS, Ueber differenzierbare asymptotisch konvexe Funktionenfamilien bei der nicht-linearen gleichmäßigen Approximation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 27 (1967) 275–288.
4. W. KRABS, Ein Pseudo-Gradientenverfahren zur Lösung des diskreten linearen Tschebyscheff-Problems. Erscheint demnächst in *Computing*.
5. G. MEINARDUS, "Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung." Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, 1964.
6. G. MEINARDUS UND D. SCHWEDT, Nicht-lineare Approximationen. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 17 (1964) 297–326.